

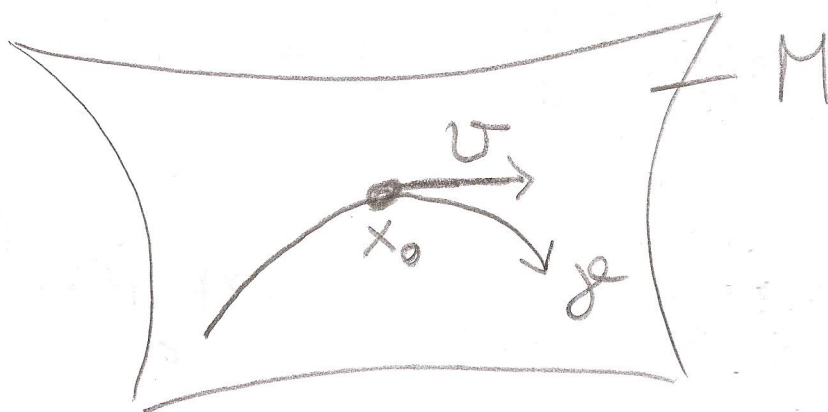
Geometrische Größen für Mannigfaltigkeiten

Def 21.3: Sei M k -dim. Mfkt. in $\mathbb{R}^n$ und $x_0 \in M$.

a) $v \in \mathbb{R}^n$ Tangentenvektor an M in x_0

$\Leftrightarrow \exists C^1$ -Kurve $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$

mit $\left\{ \begin{array}{l} \gamma(0) = x_0, \quad \gamma(s) \in \underline{\underline{M}} \\ \text{und} \\ \gamma'(0) = v \end{array} \right.$



b) $T_{x_0} M := \{ \text{alle Tangentenvektoren} \\ \text{an } M \text{ in } x_0 \}$

(Tangentenraum an M in x_0)

Bem : $\gamma(t) \equiv x_0 \implies 0 \in T_{x_0} M$

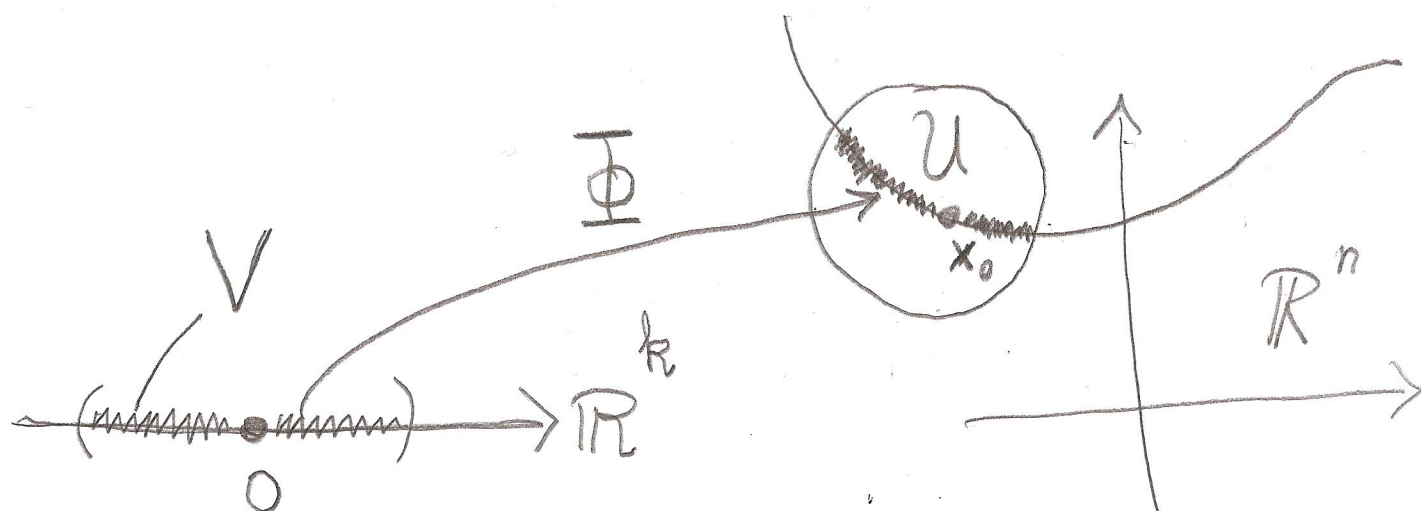
Satz 21.4 : Sei M k -dim. Mfkt.
in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für $x_0 \in M$:

$T_{x_0} M$ ist ein k -dimensionaler
Vektorunterraum von $\mathbb{R}^n$.

Beweis und Beschreibung von $T_{x_0} M$:

1.) Wir stellen M lokal bei x_0

gemäß Satz 21.3 (ii) mit einer
regulären Parametrisierung dar :



$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi: V \rightarrow U, \quad \Phi(0) = x_0, \\ \operatorname{Rg} D\Phi = k, \quad \Phi(V) = U \cap M \end{array} \right.$$

Sei

$e_1, \dots, e_k =$ Standardbasis von $\mathbb{R}^k$,

$$\gamma_i(t) := \Phi(te_i), \quad i = 1, \dots, k,$$

$$|t| \ll 1$$

$\Rightarrow \gamma_i$ Kurve in M mit $\gamma_i(0) = x_0$

$$\stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} \gamma_i'(0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0) \in T_{x_0} M, i=1, \dots, k$$

analog (betrachte $\gamma(t) := \Phi(tv), v \in \mathbb{R}^k$):

$$\text{Bild } D\Phi(0) \subset T_{x_0} M$$

umgekehrt: Sei $w \in T_{x_0} M$; dann

$\exists$ Kurve $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ mit

$$\gamma(0) = x_0, \gamma'(0) = w;$$

$\Gamma := \Phi^{-1} \circ \gamma$ ist Kurve in $\mathbb{R}^k$,

$$\text{so dass } \Gamma'(0) = \sum_{i=1}^k a_i e_i$$

mit Koeff. $a_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\Rightarrow w = \gamma'(0) &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 (\bar{\Phi} \circ \Gamma)(t) \\ &= D\bar{\Phi}(0)(\Gamma'(0)),\end{aligned}$$

d.h. : $w \in \text{Bild } D\bar{\Phi}(0)$

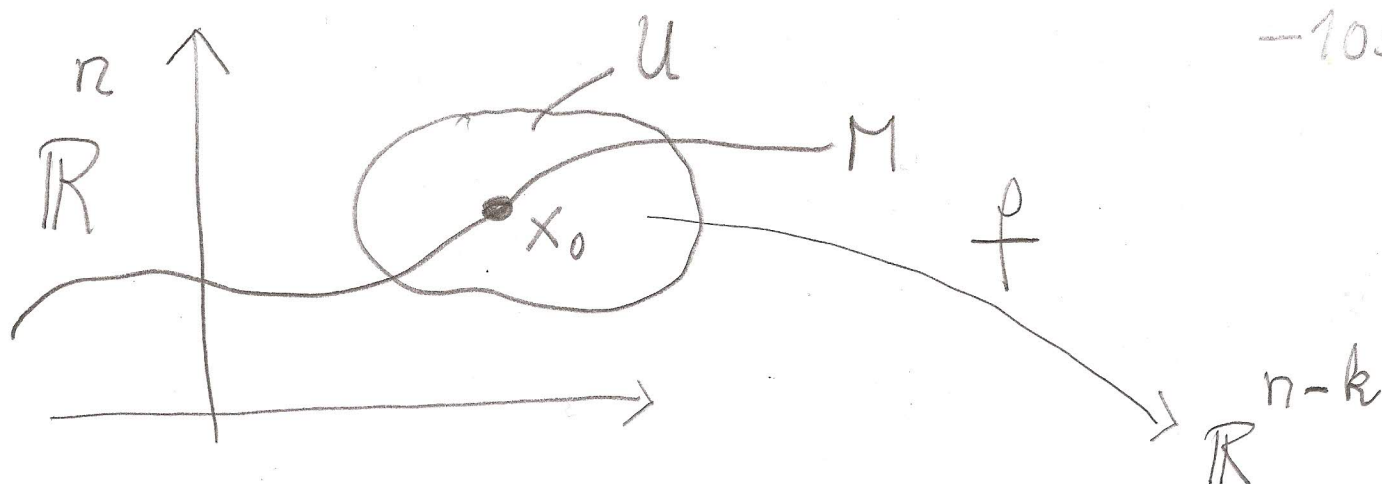
Ergebnis :

$$T_{x_0} M = \text{Bild } D\bar{\Phi}(0) =$$

Hülle von $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_k}(0)$

2.) andere Darstellung von $T_{x_0} M$:

schreibe M definitionsgemäß lokal
bei x_0 als Nullstellenmenge



$$M \cap U = \{x \in U : f(x) = a\},$$

$$\text{Rang } Df \equiv n-k;$$

sei $\gamma(t)$ Kurve in M durch $x_0 \Rightarrow$

$$f^i(\gamma(t)) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n-k$$

" $\frac{d}{dt}$ "
" $\Rightarrow$

$$\nabla f^i(x_0) \cdot \gamma'(0) = 0$$

Also:

$$v \in T_{x_0} M \iff$$

$$v \perp \nabla f^i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n-k$$

M. a. W.:

$$(T_{x_0} M)^\perp =$$

Hülle von $\nabla f^i(0)$, $i=1, \dots, n-k$ 

Spezialfälle und Beispiele:

① Sei $M := \{x \in U : g(x) = 0\}$ mit

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$,

$\nabla g(x) \neq 0$ auf M

$$\Rightarrow T_{x_0} M = [\nabla g(x_0)]^\perp$$

② Hyperflächen in Graphenform:

Sei $M := \{ (x, \varphi(x)) : x \in \Omega \}$,

$\boxed{\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}}$ offen, $\varphi : \Omega \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^1} \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Phi(x) := (x, \varphi(x))$, $x \in \Omega$, ist reguläre

Parametrisierung von $M \Rightarrow$

$$T_{(x, \varphi(x))} M = \begin{bmatrix} (1, 0 \dots 0, \partial_1 \varphi(x)), \dots \\ (0 \dots 0 1, \partial_{n-1} \varphi(x)) \end{bmatrix},$$

$[\dots] =$ "lineare Hülle".



Anwendung: Extrema mit Nebenbedingungen
Lagrange Multiplikatoren

1^{tes} Problem: "finde lokale Extrema
 von $f|_M$ "

hierbei :

$$\begin{cases} M \subset \mathbb{R}^n & k\text{-dim. Mfkt. mit} \\ M \subset U & \text{für eine offene Menge } U \subset \mathbb{R}^n \\ f \in C^1(\underline{U}, \mathbb{R}) \end{cases}$$

Notation : $x_0 \in M$ lok. Max. (Min.)

von $f|_M$: $\Leftrightarrow \exists$ offene Umg. V von x_0
in $\mathbb{R}^n$ mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \underline{\underline{V \cap M}}$$

(»)

Achtung : Die sonst übliche Bedingung

$$\nabla f(x_0) = 0$$

für lokale Extrema gilt jetzt nicht
notwendig !

Beispiel dazu :

$$U := \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := x + y,$$

$$M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \};$$

M kompakt, f stetig $\Rightarrow f|_M$ hat

Max. und Min. auf M , aber :

$$\nabla f(x, y) = (1, 1) \neq (0, 0) \quad \nabla$$

^{tes}
2. Problem :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\overline{\Omega}$ kompakt,

$\partial\Omega =: M$ ^{sei} Hyperfläche und

$$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}).$$

Wie findet man z.B. das globale Maximum x_0 von f auf $\overline{\Omega}$?

Existenz klar: $\overline{\Omega}$ kpt, f stetig auf $\overline{\Omega}$

Fall 1: $x_0 \in \Omega$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0 \quad (\otimes)$$

Fall 2: $x_0 \in \partial\Omega$

$\Rightarrow x_0$ ist lok. Max. von $f|_M$

Man ermittle also alle x_0 mit $(\otimes)$

sowie alle lok. Extrema von $f|_M$

und lege eine Tabelle der f -Werte an

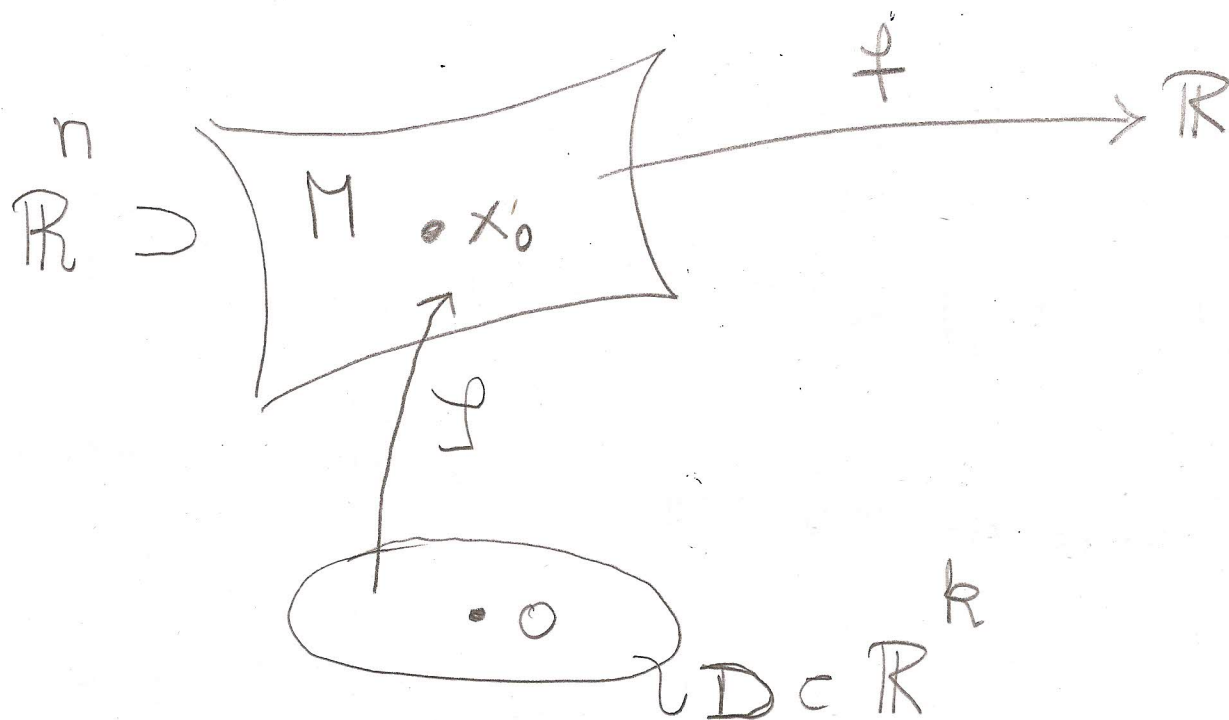
$\leadsto$ abs. Max. muss dabei sein! ∇

Fall 2 entspricht Problem 1 $\implies$

Diskussion von Problem 1 :

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k -dim. $M \neq \emptyset$,

$x_0 \in M$ sei lokale Extremstelle von $f|_M$



Sei $f: \mathbb{R}^k \supset D(\text{offen}) \rightarrow \mathbb{R}^n$

reguläre Parametrisierung von
 M bei x_0 , $f(0) = x_0$.

$\Rightarrow$

$f \circ \gamma$ hat eine innere lokale
 Extremstelle in $0 \in D$.

$\Rightarrow$

$$\nabla (f \circ \gamma)(0) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\nabla f(x_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \gamma(0) = 0, \alpha = 1, \dots, k$$

$\Leftrightarrow$

$$\nabla f(x_0) \in (T_{x_0} M)^\perp \quad (1)$$

Bem: (1) ersetzt die für "innere
 lokale Extrema" notwendige Bdg.

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

Umformulierung von (1)

Schreibe

$$\left\{ \begin{array}{l} M \cap V = \{x \in V : g(x) = 0\}, \\ V = \text{Umg. von } x_0 \text{ in } \mathbb{R}^n, \\ g: V \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^{n-k}, \quad \text{Rang } Dg \equiv n-k \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (T_{x_0} M)^\perp = [\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_{n-k}(x_0)]$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists \text{ eindeutige } \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R} \\ (1) & \quad \left(\text{die sogenannten } \underline{\text{Lagrange Multiplikatoren}} \right) \end{aligned}$$

mit

(2)

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \nabla g_i(x_0)$$

(2) besteht aus

n Gleichungen

für die Unbekannten

$$x_0^1, \dots, x_0^n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$$

Ergänzt man (2) noch durch

$$(3) \quad \hat{g}_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n-k$$

so hat man Übereinstimmung

"Zahl der Variablen =
Anzahl der Bestimmungsglen."

Insgesamt folgt:

-115-

Satz 21.5: Multiplikatorenregel von Lagrange

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$,
 $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k})$ mit $\text{Rang } Dg =$
 $n-k$. Sei $M := \{x \in U : g(x) = 0\}$.

Hat dann $f|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ in $a \in M$
ein lokales Extremum, so gibt es $\nearrow$
eindeutige

$\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla \left(f - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i g^i \right) (a) = 0$$



Beispiel: Existenz von Eigenwerten

Sei A eine symm. $(n \times n)$ -Matrix.

Beh: Es gibt eine ONB $e_1, \dots, e_n$
von $\mathbb{R}^n$ sowie Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
mit $Ae_i = \lambda_i e_i$.

Bew: Sei $f(x) := (Ax) \cdot x$

und $g(x) := |x|^2 - 1$. Man setzt

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}.$$

M ist kompakt, f ist stetig $\Rightarrow$

$\exists$ globales Minimum $x_0 \in M$ von $f|_M$.

In x_0 gilt nach Satz 21.5:

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\nabla g(x) = 2x$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right] \\ &= 2(Ax)_\alpha \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von $A \implies$

$$\boxed{Ax_0 = \lambda x_0}$$

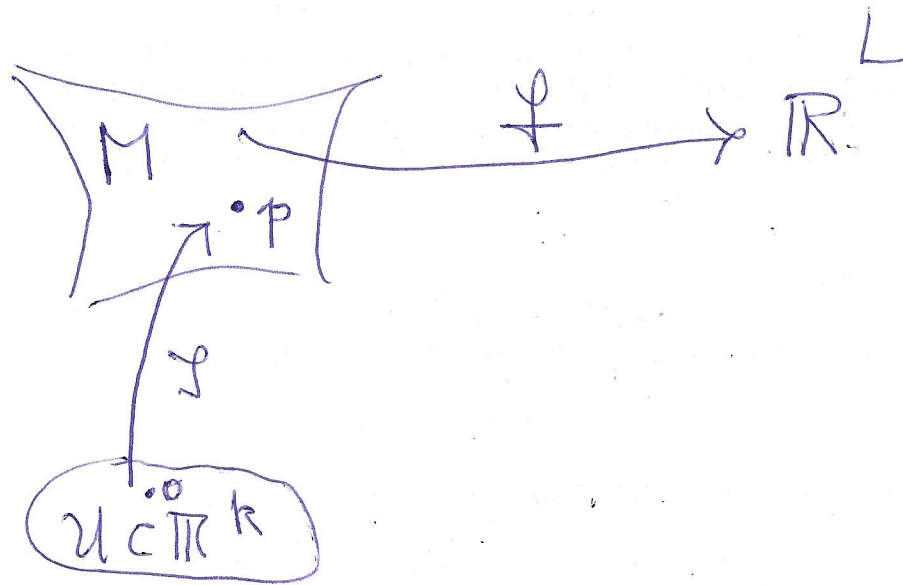
Als nächstes betrachte man f auf

$$\widetilde{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0 \text{ und } x \cdot x_0 = 0\},$$

usw.



Ergänzung: differenzierbare Funktionen ^{-a-}
auf Mannigfaltigkeiten



f differenzierbar in $p \in M : \Leftrightarrow$

$f \circ \gamma$ diff'bar in $o \in U$, $p = \gamma(o)$

Zeige: dies hängt nicht von der
speziellen Karte γ ab!

Das Differential

$$d_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^L$$

ist wie folgt erklärt ($v \in T_p M$)

$$d_p f(v) := \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(0),$$

$$\begin{cases} \gamma = \text{Kurve in } M, \gamma(0) = p, \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$$

Zeige: $d_p f$ ist eine lineare
Abbildung $T_p M \rightarrow \mathbb{R}^L$

noch allgemeiner:

